****

**DEROULEMENT**

**Domaine**

**Résolution de Problèmes**

**Sommaire**

Pages

[Le rôle de la résolution de problème dans l’apprentissage des mathématiques et sa mise en œuvre 3](#_Toc416795817)

[Module 1 : Introduction à la résolution de problème 16](#_Toc416795818)

[Module 1.0 : S’approprier le canevas d’un problème simple 26](#_Toc416795819)

# Le rôle de la résolution de problème dans l’apprentissage des mathématiques et sa mise en œuvre

La résolution de problème a pour objectif l’application des concepts et opérations arithmétiques à la réalité. Son objectif essentiel est la description des propriétés des situations en vue de mettre en relation les notions mathématiques et les calculs qui en découlent, pour le CP celles de nombre, de somme et de différence de nombres, avec les propriétés des objets de la situation qui permettent le dénombrement, les opérations d’addition et de soustraction.

### Les propriétés de la réalité qui conditionnent l’usage des nombres pour mesurer les quantités et celui des opérations arithmétiques pour inférer la mesure d’une quantité

Dans l’application des mathématiques à la réalité un nombre est la mesure d’une quantité à l’aide d’une unité de mesure. Au CP les quantités auxquelles on a affaire sont des collections, qui sont composées d’objets individualisés. L’unité est alors l’individu, elle est tellement naturelle qu’on ne se rend même pas compte qu’on utilise une unité. Pour pouvoir compter, il faut que les objets soient individualisés. On ne peut pas compter de la farine, ni de l’eau et pourtant ce sont des quantités (on peut dire qu’il y en a beaucoup ou pas beaucoup). Si on veut pouvoir appliquer les nombres à ces objets, il faut choisir une unité qui permet d’individualiser une quantité : on peut compter des cuillerées de farine ou des verres d’eau. On dit alors qu’on mesure, mais il faut bien concevoir que compter c’est mesurer : compter les élèves de la classe c’est mesurer une quantité, comme mesurer la taille d’un élève. Dans tous les cas, ce sont les mêmes nombres qu’on utilise. C’est seulement au CE1 qu’on abordera la mesure avec des unités conventionnelles, le mètre, le kilo, le litre, mais le professeur doit faire passer l’idée que le dénombrement est la mesure d’une quantité en soulignant que lorsque l’on compte des objets de même catégorie, l’unité c’est chaque objet individuel ou chaque personne. L’unité peut être aussi plusieurs objets, comme, par exemple, si l’on compte des paires de chaussures, mais alors on annonce explicitement l’unité : l’unité c’est la paire.

Dire que le nombre est la mesure d’une quantité a pour conséquence qu’ainsi conçu un nombre ne doit jamais être prononcé seul : un nombre c’est un nombre de quelque chose. C’est pour cela qu’en résolution de problème, du fait que la résolution de problème c’est l’application des nombres à la réalité, le professeur veillera à ce que les élèves fassent toujours suivre le nombre de la désignation de la quantité qu’il mesure. Dans l’énoncé d’un problème le nom de la quantité figure dans la question et l’élève souvent reprend mécaniquement les termes de celle-ci en ajoutant le nombre qu’il a calculé sans se représenter vraiment la quantité à laquelle il correspond. Pour habituer les élèves à toujours associer un nombre à une quantité, le professeur après lecture du problème fera écrire pour chaque donnée le nombre et la quantité mesurée.

 L’analyse et la compréhension des relations entre les quantités est ce qu’il y a de plus essentiel et en même temps de plus difficile en résolution de problème. En effet ce sont les relations entre les quantités présentes dans le problème qui déterminent les opérations arithmétiques licites entre les nombres. Ces opérations permettent d’inférer une quantité inconnue à partir de quantités connues, elles sont essentielles dans l’application des mathématiques au monde réel. Aux opérations d’addition et de soustraction, objets du CP, correspondent un grand nombre de situations de problèmes et donc un grand nombre de relations sémantiques entre les objets. Ce peuvent être des situations de comparaison de quantités, des situations où l’on regroupe des collections d’objets (problèmes de combinaison), des situations où une quantité est modifiée par ajout ou perte, au cours du temps (problèmes de transformation). Selon la quantité sur laquelle est posée la question, ces situations engendrent des problèmes différents.

Il est important de bien faire analyser ces problèmes par les élèves, car l’analyse qui est pertinente pour le choix de l’opération peut être masquée par le déroulement temporel de l’histoire. Si on dit qu’une personne possède une certaine quantité et reçoit une quantité supplémentaire, il est facile de calculer la quantité qu’elle a à la fin, car il est facile d’imaginer que la seconde quantité a été ajoutée à la première. Si, en revanche on dit qu’une personne avait au début une certaine quantité non précisée, qu’elle en a perdu une partie, en précisant combien et qu’on indique combien il lui reste à la fin, il est très difficile de calculer combien elle avait au début, bien que ce soit un problème d’addition, comme le précédent. Il est en effet très difficile d’imaginer que la quantité restante et la quantité perdue étaient ensemble au début et qu’elles ont été séparées en deux quantités : il faut remonter le cours du temps et inverser l’action décrite, car ce qui a été séparé doit être regroupé. Il est pratiquement impossible à un élève de CP de trouver la solution d’un tel problème en lui demandant d’imaginer mentalement ce qui se passe dans l’histoire. Il faut lui apprendre une autre façon de faire, on appelle cela le recodage de la situation.

Recoder une situation de problème, c’est en faire une description qui fait mieux apparaître la structure qui conduit à la solution. Les problèmes que nous considérons au CP se résolvent par addition ou soustraction : les actions sur les objets qui correspondent à ces opérations sur les nombres sont celles de regroupement de parties et de recherche de la partie manquante connaissant le tout et l’autre partie. Recoder la situation va donc consister à déterminer dans l’énoncé du problème si la quantité considérée provient d’un regroupement ou si c’est une quantité contenue dans une autre : il faut le faire pour les quantités connues et pour celle sur laquelle la question est posée. Pour le problème de recherche de la quantité de départ connaissant le reste et le montant de la perte, on se demandera : quand est-ce qu’il y en avait le plus ? est-ce que ce qui lui reste faisait partie de ce qu’il avait au début ? est-ce que ce qu’il a donné faisait partie de ce qu’il avait au début ? On peut à partir de là définir le statut des différentes quantités et identifier la structure du problème qui permet de choisir l’opération. C’est ce que l’on appelle le recodage. Il y a donc tout un travail d’analyse et de réflexion qui précède le choix de l’opération. Même dans les problèmes faciles où la simulation mentale de l’histoire suffit à trouver l’opération, il faut faire ce recodage pour justifier la solution et pour faire apparaître la similitude entre les problèmes qui se résolvent de la même façon en dépit du fait que les situations décrites par l’énoncé sont très différentes. C’est le moyen de donner aux élèves une première idée de ce qu’est l’abstraction mathématique.

### La progression de l’apprentissage des notions en résolution de problème au CP

La progression prend appui sur des savoirs existants, mais en choisissant ceux qui sont le plus favorables et le moins générateurs d’obstacles potentiels pour les apprentissages ultérieurs. La notion de somme ne pose pas de problème, elle a été largement utilisée dans le domaine Situations pour étudier la décomposition et la recomposition des nombres. La notion de différence est beaucoup plus délicate. Contrairement à ce qui se fait le plus souvent nous n’introduisons pas la soustraction à partir de problèmes de calcul du reste après une perte et nous recommandons aux professeurs d’éviter de donner de tels problèmes avant que les élèves aient acquis de solides compétences en matière d’analyse et de codage des énoncés. En effet associer le signe « - » à une situation de perte rend très difficile de concevoir que l’on fait la même opération de calcul d’une différence lorsqu’on calcule un gain connaissant l’avoir initial et l’avoir final. L’élève qui fait ce calcul par une addition à trou, ce qui est le cas le plus fréquent, a l’impression de faire une addition et s’il trouve le bon résultat avec des petits nombres, il a de fortes chances de poser une addition s’il doit opérer avec de grands nombres. En outre, si la soustraction est associée à une perte, il est très difficile d’imaginer de faire une soustraction pour le problème, Pierre a 5 billes, Jean en a  8. Qui en a le plus ? Combien en a-t-il de plus ? Faire apprendre la soustraction à partir d’une situation de perte crée un obstacle à la généralisation de l’opération aux autres situations de calcul de différence.

Nous avons choisi d’introduire la signification de la différence à partir des situations de comparaison de quantités. La première raison est que pour donner du sens au nombre comme mesure de la quantité, tout un module est consacré à l’estimation des quantités et à la comparaison des quantités, afin que les élèves soient habitués à comparer des quantités, à confronter leur estimation à la quantité exacte et donc que la notion de différence leur soit familière. La seconde raison est que la signification de la différence dans la comparaison est générale et s’applique aux significations plus particulières que prend cette notion dans les situations de combinaison ou de transformation : de ce fait elle est plus proche de la notion mathématique de différence, qui est la distance entre deux nombres. En effet la différence s’exprime aussi bien comme une différence en moins (3 c’est 5-2) que comme une différence en plus (5 c’est 3+2). Pourtant tout en s’exprimant verbalement dans le sens positif ou négatif, elle s’écrit mathématiquement comme une soustraction et cette écriture est passée dans la pratique quotidienne. Ainsi la notion de différence telle qu’elle est conçue dans la comparaison va pouvoir servir de pivot pour faire comprendre qu’une différence peut s’exprimer (sémantiquement dans la description des objets) aussi bien comme une différence en plus que comme une différence en moins, mais qu’elle s’écrit néanmoins (mathématiquement en tant qu’opération) comme une soustraction. Ainsi on va pouvoir faire converger la représentation sémantique de la différence vers le savoir mathématique qui définit deux notions, celle de somme calculée par l’opération d’addition et celle de différence calculée par l’opération de soustraction.

Voici le chemin que nous allons suivre pour atteindre cet objectif à la fin de l’année de CP. Au moment où commence le module résolution de problème, les élèves ont appris ce qu’est une somme à partir de l’apprentissage du nombre comme décomposition et recomposition. Après une introduction permettant aux élèves de s’approprier le canevas de la résolution de problème, nous travaillerons sur des problèmes de somme de quantités ajoutées et de calcul de la valeur de l’ajout connaissant la quantité totale. Ces problèmes sont faciles, mais l’objectif principal est de faire prendre conscience que le calcul de la différence par une addition à trou, qui est la première procédure utilisée, est un calcul différent du calcul de la somme. En effet les enfants ont tendance à penser que lorsqu’ils font une addition à trou, ils font une addition. Ils écrivent en effet une addition dans les deux cas et la seule chose qui diffère est la place où se trouve le résultat de l’opération : après le signe « = » dans le cas de l’addition et avant le signe « = » dans le cas de l’addition à trou. Mais cela ne se voit plus une fois l’équation écrite, d’où l’importance de bien faire entourer le résultat et de faire verbaliser la quantité correspondante : quantité finale ou ajout. Cela préparera l’introduction des termes génériques comme quantité totale, quantité manquante, qui sera faite plus tard.

On fait ensuite le détour par la notion de différence dans la comparaison. On montrera l’analogie entre le calcul de la valeur de l’ajout dans les problèmes précédents et le calcul de la partie manquante dans la tâche d’égalisation (*combien faut-il donner à A pour qu’il ait autant que B*) pour en venir à l’idée que la partie manquante est une sorte de différence. C’est en étudiant les diverses façons d’exprimer la différence qu’on pourra le faire.

Le module suivant a pour objectif de faire comprendre l’équivalence entre la procédure consistant à aller du petit nombre au grand nombre en avançant (c’est-à-dire en ajoutant), qui s’exprime par l’addition à trou, et la procédure qui consiste à aller du grand nombre au petit en reculant (c’est-à-dire en enlevant) qui s’exprime par la soustraction. On utilisera pour cela des problèmes de calcul de la valeur de la partie inconnue (manquante) dans une situation de combinaison de parties en un tout : l’avantage est que les parties sont symétriques, du fait que la situation est statique. On se demande quelle est la procédure la plus facile et on choisit comme données soit des nombres proches (5, 8), qui favorisent la procédure de parcours en avançant soit des nombres éloignés (2, 9) qui favorisent la procédure soustractive. L’objectif est de faire prendre conscience aux élèves que la procédure de calcul de la partie manquante par ajout et la procédure de calcul du reste après avoir enlevé la partie connue sont équivalentes. Pour faire comprendre, on utilise l’analogie avec un parcours : la distance entre les deux extrémités d’un parcours sont les mêmes, quel que soit le sens dans lequel on effectue le parcours. On conclut en disant qu’on peut calculer d’une façon ou de l’autre quand on calcule mentalement mais qu’on écrit toujours l’opération comme une soustraction parce que c’est le calcul d’une différence. On habitue les élèves à écrire l’opération de façon à ce que le résultat soit toujours après le signe « = ».

C’est là un apprentissage difficile, mais essentiel, auquel il faut être très attentif, car il s’agit de faire comprendre l’équivalence entre la forme additive (5+3=8) et la forme soustractive (8-5 =3) de la différence, qui n’est autre que l’application de la règle algébrique de changement de signe quand on fait passer un terme d’une équation d’un côté à l’autre du signe « = ». En effet transformer 5+3=8 en 8-5=3 c’est enlever 5 à chacun des membres de l’équation, ce qui donne +3=8-5 qui peut s’écrire 8-5=3. L’enjeu est de faire acquérir à un jeune élève cette notion très abstraite à partir de l’idée que la différence entre deux nombres, c’est la distance entre deux nombres et que la distance entre deux nombres c’est la même chose que la distance entre deux points de l’espace : la distance est la même quel que soit le sens du parcours. En faisant ce type d’analogie on part de quelque chose de vrai dans la réalité pour faire comprendre que c’est aussi vrai dans les nombres et les opérations.

Les problèmes de combinaison servent à assimiler les termes génériques permettant de décrire la structure du problème, à savoir pour les problèmes de calcul de tout : quantité connue, quantité manquante quantité totale (question) et pour les problèmes de calcul de partie : quantité totale, quantité-partie connue, quantité-partie manquante (question), ces deux dernières quantités étant bien sûr des quantités-parties.

Les problèmes temporels de transformation sont abordés en dernier de manière à pouvoir tirer parti des termes génériques du codage mis en place dans le module précédent. Le codage en termes génériques est surtout utile pour ces problèmes, car le même terme générique peut servir de code à une grande diversité de contenus sémantiques.

Nous commencerons par des problèmes de calcul de partie, qui sont dans la continuité de ceux étudiés dans le module 3 et d’abord les problèmes d’ajout :

* Problèmes de calcul de la quantité ajoutée connaissant la quantité initiale et la quantité totale, dont le codage est :
* quantité initiale : quantité-partie connue,
* quantité ajoutée : quantité-partie manquante (question),
* quantité finale : quantité totale.
* Problèmes de calcul de la quantité initiale connaissant la quantité ajoutée et la quantité finale dont le codage est :
* quantité ajoutée : quantité-partie connue,
* quantité initiale : quantité-partie manquante (question),
* quantité finale : quantité totale.

Le codage sert à représenter les quantités dans les outils de représentation, notamment la boîte, et le contenu de la boîte détermine l’écriture de l’opération à effectuer. Cette écriture devra désormais être celle d’une addition dans le cas d’une somme et d’une soustraction dans le cas d’une différence : l’addition à trou sera proscrite en résolution de problème. Pour obliger les élèves à adopter cette règle l’élève ne calculera pas directement le résultat de l’opération mais devra poser l’opération sur une calculette.

L’intérêt du codage est de montrer que ces deux problèmes, dont l’un est facile et l’autre difficile se ressemblent énormément : ils ont une quantité totale connue, une quantité partie connue et une quantité manquante à calculer. La seule chose qui diffère est le fait que la partie manquante n’est pas la même (c’est la quantité ajoutée ou la quantité initiale), mais cela n’a pas d’importance. Ils se résolvent de la même façon, car le calcul de chaque quantité-partie se fait de la même façon : quantité manquante = quantité totale – quantité connue.

On fera la même chose pour les situations de perte. Pour ce qui est du calcul de la valeur d’une partie, on a :

* Problèmes de calcul de la quantité restante connaissant la quantité initiale et la valeur de la perte dont le codage est :
* quantité initiale : quantité totale,
* quantité perdue : quantité-partie connue,
* quantité restante : quantité-partie manquante (question),
* Problèmes de calcul de la quantité perdue connaissant la quantité initiale et la valeur du reste dont le codage est :
* quantité initiale : quantité totale,
* quantité restante : quantité-partie connue,
* quantité perdue : quantité-partie manquante (question).

Comme pour les problèmes d’ajout, ces deux problèmes (le premier facile, le second difficile) ne différent que par la nature de la partie manquante et de fait se résolvent de la même façon : quantité manquante = quantité totale – quantité connue.

C’est l’occasion de faire prendre conscience que ces quatre problèmes ont le même schéma de solution, en dépit des différences de contenu sémantique.

On termine par les deux problèmes de calcul de tout, dont l’un est le plus facile des problèmes de transformation et l’autre le plus difficile

* Problèmes de calcul de la quantité totale en situation d’ajout, dont le codage est :
* quantité initiale : quantité-partie connue,
* quantité ajoutée : quantité-partie connue,
* quantité finale : quantité totale (question).
* Problèmes de calcul de la quantité totale en situation de perte, connaissant la valeur de la perte et celle du reste dont le codage est :
* quantité perdue : quantité-partie connue,
* quantité restante : quantité-partie connue,
* quantité initiale : quantité totale (question).

Là encore les problèmes ont une même solution. La comparaison entre les deux problèmes montre qu’il est intéressant de faire un recodage, car lorsqu’on ne peut trouver la solution en se représentant mentalement le déroulement de la situation, le recodage du problème permet de trouver les informations essentielles pour la solution et ainsi de découvrir l’opération qui permet de le résoudre.

Ce travail de recodage est en fait le travail de compréhension en profondeur du problème, qui consiste à dégager les relations sémantiques abstraites essentielles pour la solution, qui peuvent être masquées par les propriétés concrètes de la situation. Ce travail est difficile, notamment pour des problèmes tels que le dernier. Nous verrons en détail comment le conduire. L’ambition est dès le CP de donner une idée de la façon dont on peut faire une lecture en profondeur d’un texte.

## Le canevas de la résolution de problème

Etant donné le statut que nous accordons à la résolution de problème dans l’apprentissage et l’importance que nous accordons au travail de compréhension, la façon dont se déroulera une séance présente quelques particularités qu’il convient de préciser.

(i) L’énoncé

Il est lu par le professeur et peut selon les phases s’accompagner ou non d’une représentation matérielle de la situation (avec des cubes par exemple)

(ii) Le codage du problème

Il sera très simple au début et plus complexe à partir du module 3 où seront mis en place les termes génériques de codage. Dans les deux premiers modules le professeur se contentera de dire et d’écrire (en interaction avec les élèves) pour chaque donnée le nombre et le type d’objet et pour la question un « ? » à la place du nombre. Les autres informations seront exprimées dans le schéma

A partir du module 3 on indiquera en plus pour chaque donnée et pour la question le statut de chaque quantité de la façon qui sera décrite précisément dans Déroulement.

(iii) Les outils de représentation

On utilise deux outils de représentation qui sont aussi utilisés dans d’autres domaines : le schéma et la boîte. Le **schéma** est une représentation qui sert à symboliser physiquement les quantités comme des grandeurs sur une ligne numérique et l’ajout des quantités comme la mise bout à bout des grandeurs correspondantes. Chaque quantité est figurée par un pont liant les deux extrémités du segment représentant la quantité et au-dessus du pont est écrit le nombre qui représente le nombre d’unités du segment. Un grand pont représente la quantité totale. Le schéma exprime bien physiquement le regroupement de quantités et constitue donc un support utile. Dans les situations à évolution temporelle on l’utilisera pour représenter les problèmes de calcul de la quantité finale connaissant la quantité initiale et la quantité ajoutée ainsi que les problèmes de calcul de la valeur de l’ajout connaissant la quantité initiale et la quantité finale, car l’évolution temporelle exprime bien la structure du problème. On évitera de le faire dans les autres cas car l’évolution temporelle risque de masquer la structure du problème, comme on l’a souligné ci-dessus.

La boîte est un système de représentation plus abstrait dans laquelle on exprime les relations de somme et de différence entre les nombres. Dans la partie basse les deux cases représentent la mesure des quantités qui sont des parties (avec la particularité que dans le cas de la comparaison il s’agit du petit nombre et de la différence), la case du haut la mesure de la quantité totale (ou le grand nombre dans le cas de la comparaison). On expliquera en début de CE1, mais on pourra anticiper en cas de question d’un élève, que dans le cas de la comparaison, le grand nombre est séparé en deux parties par la mise en correspondance : une partie égale au petit nombre et une partie égale à la différence. La boîte a l’avantage de permettre de bien représenter des propriétés abstraites comme la commutativité.

En conséquence on mettra uniquement des nombres dans la boîte, pas des noms d’objets ou de catégories d’objets.

(iv) La solution

La présentation de la solution dépend des modules. Dans les modules 1 et 2, toutes les procédures de solution sont acceptées dans la mesure où elles sont justifiées : addition, addition à trou et même comptage. Il s’agit de favoriser l’émergence de solutions spontanées. Dans le module 3 où on veut faire prendre conscience de l’équivalence de deux procédures, l’une additive, l’autres soustractive, on demande de réfléchir pour choisir la procédure la plus facile à mettre en œuvre. Dans le module 4, on l’a vu, on fixe l’écriture correspondant à l’opération canonique de calcul d’une différence, la soustraction.

On terminera en rappelant qu’il ne faut pas oublier la phrase qui formule la réponse à la question du problème, comme on le fait traditionnellement.

## Remarques pratiques pour l’ensemble de la progression

 Pour permettre à l’enseignant de s’organiser et d’adapter le programme prévu à sa classe, nous faisons quelques remarques et rappelons que les déroulements-types séance par séance qui figurent dans ce document, ne sont là qu’à titre d’exemples.

 Le fait de travailler au début des premiers modules sur un problème de contexte trains, pourra être un moyen de commencer par un support matériel. Utiliser des cubes physiques représentant des wagons est une option liée au niveau de la classe, et il faudra de toute façon au cours de la première phase, passer à des trains « à imaginer ». Si la couleur n’est pas un élément déterminant, les trains physiques seront de préférence composés de façon hétérogène (par exemple : 3 cubes verts, 2 cubes rouges, etc) afin d’éviter un comptage-numérotage trop systématique et de travailler sur du calcul mental de petites sommes.

 Un des défis majeurs de l’année de CP en mathématique est de faire abandonner le surcomptage et le comptage 1 à 1, au plus grand nombre d’élèves, au profit de stratégies s’appuyant sur les stratégies de décomposition, les stratégies développées en calcul mental, comme la recherche du complément à 10, ou l’utilisation des doubles et les sauts de 10. Le professeur trouvera au cours des modules des remarques visant cet objectif, tout en respectant la nécessité de prendre en compte l’hétérogénéité entre les classes comme au sein d’une classe. L’idée générale est d’inciter au plus vite à l’abandon du surcomptage 1 à 1 tout en permettant aux élèves pour qui c’est encore la seule méthode possible, le temps de franchir ce cap à leur tour.

**DEROULEMENT**

**PREMIER TRIMESTRE**

**Domaine**

**Résolution de Problèmes**

|  |  |
| --- | --- |
| **Module** | **Module 1 : Introduction à la résolution de problèmes**  |
| **Module** | Module 1.0 | Module 1.1 |
| **Séances courtes (4)** | 2 | 2 | - | - | - |
| **Séances longues (3)** | - | - | - | - | 1 | 1 | 1 |
| **Enjeux** | **Module 1.0*** Amorcer un lien entre un « type » de problème, les schémas et une écriture algébrique. Selon le type de problème : Le résultat n’est pas forcément à droite du signe « = » (addition à trou pour le calcul de la quantité manquante). Ce qu’on cherche n’est pas au même endroit dans les schémas.
* Amorcer de bonnes pratiques en résolution de problèmes : s’habituer à une analyse systématique de l’énoncé du problème, faire une **phrase réponse** (oralement) à la fin de chaque situation, et **vérifier** la réponse.

**Module 1.1**Différencier le « calcul du tout »  et le « calcul de la quantité manquante ».* Premières réflexions collectives sur la notion de **procédure de résolution** (« ce qu’on a fait / comment on a trouvé »), différente selon ce qu’on cherche.
* S’entraîner à **visualiser** un problème (sans les cubes).
* (Repérer / aider les enfants qui conceptualisent mal la notion de « quantité manquante »)
 |
| **Descriptif du module** | Le professeur manipule des « cubes » de couleurs. Le professeur décrit une situation puis pose une question. **Habillages :**Avec les cubes, le professeur construit des petits trains ou des tours.Habillage vêtements, animaux, fruits… **2 types de problèmes :** -Calcul du tout : *« Un train a 4 Wagons. On en rajoute 2. Combien le train a-t-il de wagons maintenant ? »*-Calcul de la quantité manquante : *«  Un train a 3 wagons. On rajoute des wagons et maintenant le train a 5 wagons. Combien de wagons a-t-on rajoutés  ?  »*La solution de ces problèmes se fait, a priori, par des procédures spontanées de double comptage. Une fois la réponse trouvée, on fera un schéma et on écrira une opération qui correspond à « ce qu’on a fait ».On posera ensuite des problèmes identiques mais sans les cubes, il faudra « imaginer l’histoire dans sa tête ». Ainsi, la vérification qui pouvait être *matérielle* avec les cubes, deviendra alors *numérique*.  |
| **Journal du nombre** |  |
| **Référence aux programmes officiels** | **- Résoudre des problèmes simples à une opération****- Calculer mentalement des sommes****- Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous.** |

# Module 1 : Introduction à la résolution de problème

L’objectif général de ce premier module est double : initier aux pratiques liées à la résolution de problème (principalement dans le module 1.0) et d’autre part différencier les procédures de calcul du tout et de calcul de la quantité manquante (approfondi dans le module 1.1).

Le matériel nécessaire pour ces trois séances consiste en des « cubes » (de deux couleurs différentes) à l’usage du professeur, et l’ardoise pour les élèves. De plus, pour chaque problème, une feuille à coller dans le cahier résumera tout ce qu’on a fait. L’activité consiste à énoncer un problème à l’oral à partir de cubes représentant les wagons d’un train. Les élèves devront présenter leurs réponses sur leur ardoise. Puis collectivement on remplira la fiche-problème. Une « fiche-problème » (téléchargeable à partir du site et en annexe de ce document) contient un schéma d’une boîte vide et une ligne vierge (avec les traits marqués aux unités, les traits aux dizaines étant plus grands).

**Rappel** : les problèmes de trains sont utilisés à cause de leur analogie avec la ligne numérique.

1. **Les deux premiers problèmes de calcul du tout et de calcul de la quantité manquante**

**1. Problème de Tout**



*- « Voici un petit train de 4 wagons »*



*- « Je rajoute 2 wagons. La question est : Combien de wagons a le train maintenant ?  »*

**Procédure de résolution :**

### Analyse du problème

 Le professeur dit :

«  Qu’est-ce que c’est 4 ? C’est le nombre de wagons du train au début » et il écrit « 4 wagons au début ».

 « Qu’est-ce que c’est 2 ? C’est le nombre de wagons ajoutés » et il écrit  « 2 wagons ajoutés ».

On demande « Combien de wagons a le train après ? » et il écrit « … nombre de wagons du train complet. C’est ce qu’on doit chercher ».

### Représentation

 Le professeur construit ensuite le schéma :

 Il fait d’abord un pont depuis l’extrémité jusqu’à 4 unités. Il marque 4 au dessus du pont et dit « J’écris 4 parce que ce sont les 4 wagons du début ». Il fait ensuite un pont de deux unités de 4 à 6 et dit « J’écris 2 parce que ce sont les 2 wagons ajoutés ».

 Le professeur dit « On demande combien de wagons a le train maintenant » et il dessine un grand pont qui va de l’extrémité gauche jusqu’à 6 puis dit «  Ecrivez sur l’ardoise l’opération qu’il faut calculer pour trouver le nombre qu’il faut écrire là ». Une fois que les élèves ont écrit 4+2, il dit «  Maintenant vous allez calculer le nombre de wagons du train entier : 4+2= ».

**4**

wagons

**2**

wagons

wagons

### Résolution

 Les élèves donnent leur solution sur l’ardoise, le professeur corrige les éventuelles erreurs, écrit :

 **6**

 **4 + 2** =

et dit « Attention on n’oublie pas d’entourer le résultat ».

Remarques sur le calcul :

Il faut savoir combien font 4 et 2.

Pour ces petits nombres certains connaissent peut-être (déjà) la réponse par cœur. Cela ne les empêche pas d’écrire l’opération et d’entourer le résultat ainsi que DE faire les schémas (plus tard). Ca ne sera a priori plus le cas pour la suite, quand on prendra des nombres un peu plus grands.

Le professeur peut dire :

« Ce n’est pas la peine de tout recompter depuis le début ! »

*Oral (Doigts).*

« Il y en avait 4 :

5 (1) , 6 (2).

**La réponse c’est le nombre auquel on arrive : 6 !** »

(Au ralenti : En partant de 4, j’en ajoute 1 (doigts) ça fait 5 (oral), 2 ça fait 6)

« J’écris 6 au-dessus du grand pont parce que c’est le nombre de wagons du train entier »

**4**

wagons

**6**

**2**

wagons

wagons

Remarque sur l’utilisation du schéma-ligne :

**Le schéma-ligne** est fait collectivement au tableau et sur la fiche-problème (dans l’idéal de façon autonome pour certains).

Celui-ci pourra être fait par l’enseignant au tableau de façon incomplète (sans le 6 ici) pour bien montrer ce que l’on cherche. Et donc ceci avant d’évaluer les réponses des enfants sur leurs ardoises. Il présente l’avantage d’être un bon support pour expliciter les procédures de résolution qu’on attend des élèves.

(Les couleurs présentées dans ce document pourraient correspondre à des wagons bleus et des wagons rouges, mais l’association entre la couleur des wagons et les couleurs du schéma n’est pas essentielle, et ne réfère pas non plus aux dizaines et unités).

### Vérification

 Puis le professeur dit « Maintenant nous allons placer les nombres dans la boîte. Dans la case du haut on écrit le nombre de wagons du train entier, on écrit 6. Dans la case du bas à gauche on écrit le nombre de wagons au début, on écrit 4. Dans la case du bas à droite, on écrit le nombre de wagons ajoutés 2 ». Il ajoute : « ce qui est écrit dans la boîte veut dire : 4+2=6 »

|  |
| --- |
| **6** |
| **4** | **2** |

### Formulation

 Le professeur termine en disant «  la réponse à la question est  » et il écrit : le train a maintenant 6 wagons. A la fin le professeur résume le travail qui a été fait : « On a fait un problème où on a construit un train en deux fois. On a mis 4 wagons en premier et 2 wagons en second. On demandait de calculer le nombre de wagons du train en entier. On dira qu’on a calculé la quantité totale de wagons. On a fait une addition et on a trouvé 6 wagons »

**2. Problème de la quantité manquante**



*- « Voici un petit train de 3 wagons ?*

- *« J’en rajoute* (rapidement et dos aux élèves) »



*« Je vous dis que le train a maintenant 5 wagons. La question est : Combien de wagons ai-je ajoutés ? »*

 Le professeur place 3 cubes après avoir dit « voici un petit train de 3 wagons ». Puis il tourne le dos à la classe et ajoute 2 wagons.

 Le professeur ne dessine pas les wagons manquants, pour éviter que les élèves se contentent de compter. Il faut que les élèves imaginent les wagons manquants comme une quantité encore inconnue.

### Analyse du problème

 Le professeur reprend ensuite l’énoncé. Il dit « Qu’est-ce que c’est 3 ? » et il écrit : 3 : nombre de wagons du petit train

Puis dit « Qu’est-ce que c’est 5 ? » et il écrit : 5 : nombre de wagons du train complet

Puis « On demande combien on a ajouté de wagons ? », il écrit : nombre de wagons ajoutés et dit « C ‘est ce qu’on doit chercher »

### Représentation

 Le professeur construit ensuite le schéma :

Il fait d’abord un pont depuis l’extrémité jusqu’à 3 unités. Il marque 3 au dessus du pont et dit « J’écris 3 parce que ce sont les 3 wagons du petit train »

Il fait ensuite un pont de 5 unités et dit « J’écris 5, par ce que c’est le nombre de wagons du train maintenant »

 Le professeur dit « On demande combien de wagons j’ai ajoutés? Comment est-ce que je peux montrer sur le schéma combien de wagons j’ai ajoutés ?». Après discussion avec les élèves il dessine un pont entre 3 et 5 et dit : « C’est cela qu’on doit calculer »

**3**

**5**

wagons

wagons

wagons

### Résolution

 Puis il dit « Maintenant cherchez ce nombre et écrivez sur l’ardoise l’opération que vous faites »

 Le professeur fait corriger les erreurs et écrit 2 au-dessus du pont. Il y aura vraisemblablement une majorité d’additions à trou. S’il y a des soustractions, il dit « C’est bon, mais on va d’abord écrire avec une addition à trou :

 **3 + 2 =** **5**

Attention on n’oublie pas d’entourer le résultat. Quand on écrit une addition à trou le résultat est avant le « = »

Remarques sur le calcul :

Il faut savoir combien il y a entre 3 et 5.

Oral (doigts) : 4(1), 5(2). C’est bon, on est à 5. **La réponse c’est le nombre qu’on a sur les doigts quand on a compté jusqu’au bout : 2 !**

(Au ralenti : En partant de 3, 4 (oral), ça en fait 1, 5, ça en fait 2)

Le professeur écrit 2 au-dessus du petit pont et fait remarquer que c’est le nombre des wagons qu’on a ajoutés.

**3**

**2**

**5**

wagons

wagons

wagons

Remarque sur l’utilisation du schéma-ligne :

Celui-ci pourra être fait par l’enseignant au tableau de façon incomplète (sans le 2 ici) pour bien montrer ce que l’on cherche. Et donc ceci avant d’évaluer les réponses des enfants sur leurs ardoises. Il présente l’avantage d’être un bon support pour expliciter les procédures de résolution qu’on attend des élèves.

### Vérification

 Le professeur dit « Maintenant nous allons placer les nombres dans la boîte. Dans la case du haut on écrit le nombre de wagons du train entier, on écrit 5. Dans la case du bas à gauche on écrit le nombre de wagons au début, on écrit 4. Dans la case du bas à droite, on écrit le nombre de wagons ajoutés : 2» Il ajoute : « Ce qui est écrit dans la boîte veut dire : 3+2=5 »

|  |
| --- |
| **5** |
| **3** | **2** |

### Formulation

 Le professeur termine en disant «  la réponse à la question est  » et il écrit : on a ajouté 2 wagons. A la fin le professeur résume le travail qui a été fait : « On a fait un problème où on a construit un train en deux fois. On a mis 3 wagons en premier on sait que le train entier a 5 wagons et on a cherché le nombre de wagons qu’on a ajoutés. On dira qu’on a calculé la quantité qui manque à 3 wagons pour avoir un train de 5 wagons. On a fait une addition à trou et on a trouvé 2 wagons. Attention la dernière fois on a avait fait une addition pour calculer  le nombre de wagons du train entier. Cette fois on a fait une addition à trou pour calculer le nombre de wagons ajoutés ».

Les productions des élèves :

 Ce que les élèves doivent écrire sur leurs ardoises évolue aux cours des séances et cette évolution peut se faire à des rythmes différents selon la rapidité des classes et/ou de certains élèves. Dans tous les cas, chaque élève remplira pour chaque situation présentée une fiche-problème. Seul ce qui est demandé individuellement sur les ardoises évolue. Nous allons d’abord présenter l’objectif souhaité pour les productions des élèves, puis la progression (adaptable) au sein de ce module 1.

Ardoise (idéale) attendue pour un **problème de tout** :

**RECTO**

55

4 + 2 =

6****

6

**VERSO**

Vérification pour les problèmes de tout : on vérifie qu’en calculant autrement, on trouve la même chose. Par exemple :

2 + 2 + 2 = 4 + 2 = ? 6

Ardoise (idéale) attendue pour un **problème de recherche de la quantité manquante** :

**RECTO**

**3+ 2 = 5**

 **4 + 2 =**

**2**

**VERSO**

Vérification pour les problèmes de quantité manquante : avec le nombre qu’on a trouvé (5 ici) « ça marche ».

2 + 1 + 2 ?= 3 + 2 = 5

# Module 1.0 : S’approprier le canevas d’un problème simple

## Progression du Module 1.0

-Le schéma-ligne incomplet (sans le nombre qui correspond à la question) est fait au tableau par le professeur.

- On attend sur les ardoises uniquement la réponse, en travaillant sur les deux procédures de double comptage qui doivent être distinguées et maitrisées. Le schéma-ligne au tableau pourra être utilisé pour décrire la procédure que les élèves doivent employer (ou ont déjà employée).

Pour les élèves qui trouvent la réponse rapidement, on pourra leur demander d’écrire l’opération voire de faire le schéma-boîte (sur leur ardoise).

- On pourra, si le professeur en ressent le besoin, faire une **vérification** **physique** (optionnelle et de toute façon non durable) de la façon suivante :

Le professeur explique comment on remplit le schéma : on écrit 4 parce que le train avait au début 4 wagons, on a écrit 2 parce qu’on a ajouté 2 wagons. Le professeur (ou un élève) peut, pour un problème de tout (resp. de la quantité manquante) tout compter depuis le début pour voir s’il y en a effectivement 6 (resp. écarter 4 cubes et voir s’il en reste effectivement 2).

- Une fois la solution établie, on va remplir la fiche-problème collectivement. Ce qui correspond donc à : faire écrire l’opération correspondante en entourant le résultat, faire le schéma-ligne en rappelant sur celui-ci ce que l’on a fait (ajouter 2 à 3 ou savoir combien il y a entre 3 et 5), remplir le schéma-boîte. La réponse est également entourée sur les schémas.

- La **phrase réponse (orale)** est  obligatoire pour terminer un problème. Le professeur pourra tout au long de l’année attirer l’attention sur l’importance de celle-ci en résolution de problème. Par exemple, de la façon suivante : « Est-ce qu’on peut passer au problème suivant ? On n'a rien oublié ? Si… répondre à la question de l’énoncé ! ». On relit le problème et un élève interrogé répond oralement : « Le train a maintenant 6 wagons ».

### Suite-type des séances pour le module 1.0

 **Le module 1.0 est composé de 4 séances courtes,** une séance dans une journée. Son enjeu est de familiariser les élèves avec des petits problèmes. Vous trouverez dans la suite la proposition des séances : type de problème et des valeurs numériques encadrées, puis la proposition de l’habillage de problème.

*Séance 1*

- Problème de Tout n°1

4 + 2 = 6

Le problème de train présenté : *« Voici un petit train de 4 wagons.  Je rajoute 2 wagons. La question est : Combien de wagons a le train maintenant ? »*

*Séance 2*

 On va, au cours de cette séance, passer à des problèmes identiques dans la forme orale mais sans les trains ni les cubes. Il faudra donc « imaginer l’histoire / la situation dans sa tête ».

Remarque : plus de vérification physique possible, on garde toujours des nombres ne dépassant pas 6.

- Problème de Tout n°2

3 + 3 = 6

*« Julie a 3 pantalons et 3 T-shirts dans sa commode. Combien a-t-elle de vêtements dans le tiroir de la commode ? »*

*Séance 3*

 Au moment où l’on passe aux problèmes de la quantité manquante, on peut insister sur le fait que ce n’est pas le même type de problème et qu’on va trouver la solution différemment. « On va avoir un problème de train, mais cette fois je vais vous demander combien j’en ai ajoutés ».

Pour l’introduction du 1er problème de la quantité manquante on peut à nouveau utiliser la manipulation.

- Problème de la quantité manquante n°1

3 + 2 = 5

Problème de train présenté : *« Voici un petit train de 3 wagons. J’en rajoute. Je vous dis que le train a maintenant 5 wagons. La question est : combien de wagons ai-je rajoutés ? »*

*Séance 4*

- Problème de la quantité manquante n° 2

2 + 4 = 6

*« Jacqueline a 6 vêtements dans son tiroir : des pantalons et des T-shirts. Elle a 4 pantalons, combien y-a-t-il de T-shirts dans son tiroir ? »*

**Module 1.1 - Différenciation entre le calcul du tout et le calcul du complément**

Dans ce module on utilise des problèmes de même type en alternant, quoique pas de façon complètement systématique, les problèmes de calcul de quantité totale et de quantité manquante. Dans les problèmes de calcul de la quantité totale on veillera de temps à autre à ne pas donner en premier la partie qui a le plus grand nombre, de manière à faire utiliser la commutativité de l’addition.

L’objectif est de faire prendre conscience aux élèves des différences qu’il y a entre les deux types de problèmes en soulignant ces différences :

* Sur le schéma où est-ce qu’on va désigner la quantité qu’il faut calculer : est-ce le grand pont ou un petit pont ?
* Comment on calcule ? On ajoute deux petits nombres pour trouver un plus grand nombre qui est la somme ? Ou bien on cherche combien il faut ajouter au premier nombre pour avoir autant que dans le second ?

 Bien insister pour que les élèves entourent dans leur addition le nombre qui est le résultat.

* Comment on appelle le calcul qu’on a fait : le calcul de la quantité manquante ou le calcul de la quantité totale. A la fin du problème bien formuler ce qu’on avait comme données et ce qu’on a calculé. On avait deux quantités qui sont séparées, on les a regroupées et on a calculé la quantité totale. Ou bien on avait deux quantités et la première quantité fait partie de la deuxième quantité, donc la deuxième quantité est la quantité totale et on cherche la quantité qui manque pour avoir la quantité totale. On utilisera une diversité de sous-catégories (comme pantalon ou tee-shirt) faisant partie d’une catégorie plus large (vêtements) afin de pouvoir désigner facilement les parties et le tout ;
* Le professeur veillera également à toujours faire suivre un nombre d’une catégorie d’objets pour que l’élève puisse penser à l’objet en même temps qu’au nombre.
* Si des élèves ont fait une soustraction au lieu d’une addition à trou, leur dire « C’est juste aussi, on expliquera plus tard pourquoi, c’est la même chose. Maintenant on étudie l’addition à trou »

### Suite-type des séances pour le module 1.1

 A partir de là on passe aux séances longues et on fait travailler les différents habillages des problèmes.

*Séance 1*

- Problème de la quantité manquante n°3

2 + 3 = 5

*« Dans la famille Dumas il y a 5 ballons, 2 ballons de rugby et des ballons de football. Combien y –a-t-il de ballons de football ? »*

- Problème de Tout n°3

2 + 4 = 6

*« Sarah a sur sa table 2 poupées et 4 petites voitures. Combien a-t-elle de jouets ? »*

 Au moment de construire le schéma, le professeur peut laisser construire les deux schémas (avec le 1er petit pont jusqu’à 2 et le 2ème de 2 à 6 pour le 1er schéma ; pour le deuxième schéma on fait d’abord le petit pont jusqu’à 4 puis le 2ème petit pont de 4 à 6). On fait constater qu’on arrive au même résultat mais que c’est plus facile d’ajouter 2 à 4 que l’inverse. Le professeur peut aussi, si les élèves sont assez avancés, faire le schéma en commençant par 4 en faisant expliciter pourquoi. Au moment de remplir la boîte il explique que l’on peut mettre soit 2 à gauche et 4 à droite soit l’inverse, parce que de toute façon on aura le même nombre 6 dans la case du haut. Quand on fait le calcul il vaut mieux commencer par le grand nombre parce que c’est plus facile à calculer et qu’on risque moins de se tromper.

 On peut garder ces deux problèmes au tableau, avec les schémas et les opérations correspondantes, afin de bien comparer les deux.

- Problème de la quantité manquante n°4

4 + 1 = 5

*« Ingrid a 5 cahiers, 4 ont une couverture rouge et le reste une couverture bleue. Combien de cahiers ont une couverture bleue ? »*

- Problème de Tout n°4

2 + 3 = 5

*« Dans le garage de la famille Dumont il y a 2 vélos et 3 voitures. Combien y a-t-il de moyens de transport ? »*

S’il reste du temps le professeur pourra proposer un autre problème du même type.

*Séance 2*

- Problème de Tout n°5

3 + 1 = 4

*« Dans le jardin de la maison il y a 3 chiens et 1 chat. Combien y a-t-il d’animaux ? »*

- Problème de la quantité manquante n°5

2+ 2 = 4

*« Au zoo dans la cage des lions il y a 4 lions, les 2 parents lions et les enfants lions. Combien y a-t-il d’enfants lions ? »*

- Problème de Tout n°6

4 + 2 = 6

*« Dans la corbeille à fruits il y a 4 oranges et 2 bananes. Combien y a t-il de fruits ? »*

- Problème de la quantité manquante n°6

2 + 3 = 5

*« Dans la corbeille à fruits il y a 5 fruits, 2 bananes et des oranges. Combien y a-t-il d’oranges ? »*

*Séance 3*

**Tours avec cubes**

 Ces problèmes sont un retour à des situations où les objets s’ajoutent au lieu de former des catégories. Ils permettent une visualisation et peuvent être utiles pour les élèves moins avancés. Le professeur jugera s’il est nécessaire de faire construire effectivement la tour. Cela peut être utile pour la vérification.

- Problème de la quantité manquante n°7

4 + 2 = 6

*« On fait une tour de 6 cubes avec 4 cubes rouges et des cubes bleus. Combien faut-il de cubes bleus ? »*

- Problème de Tout n°7

3 + 2 = 5

*« On fait une tour avec 3 cubes rouges et 2 cubes bleus. Combien de cubes a la tour ? »*

On termine la séance avec des problèmes du même type.

- Problème de tout n°8

1 + 2 = 3

- Problème de quantité manquante n°8

4 + 2 = 6

**Ci-dessous un aperçu général d’une fiche problème (téléchargeable sur le site avec des formats différents pour le schémas-ligne) :**

|  |
| --- |
|  |
|  |  |